1. Интегральная сумма

**Задача:** исследовать интегральную сумму функции , заданной на отрезке

**План:**

**Интегральная сумма.**

1. Составьте и изобразите интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры:
   * Изобразите график функции.
   * Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции, вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, и осью Ox.
   * Разбейте отрезок на n элементарных отрезков, точками отметьте их концы на рисунке.
   * Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметьте их на рисунке.
   * Вычислите значения функции в выбранных точках, отметьте их на рисунке.
   * Изобразите ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точек внутри элементарных отрезков.
2. Исследуйте ступенчатую фигуру. Для этого выберите количество ступеней (от 3 до 5) и посмотрите, как изменяется фигура при смещении точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения точек: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор). Затем выберите другое количество ступеней (от 6 до 10), а затем (от 11 и больше) и повторите процедуру.
3. Сделайте заключение.

**Последовательность интегральных сумм.**

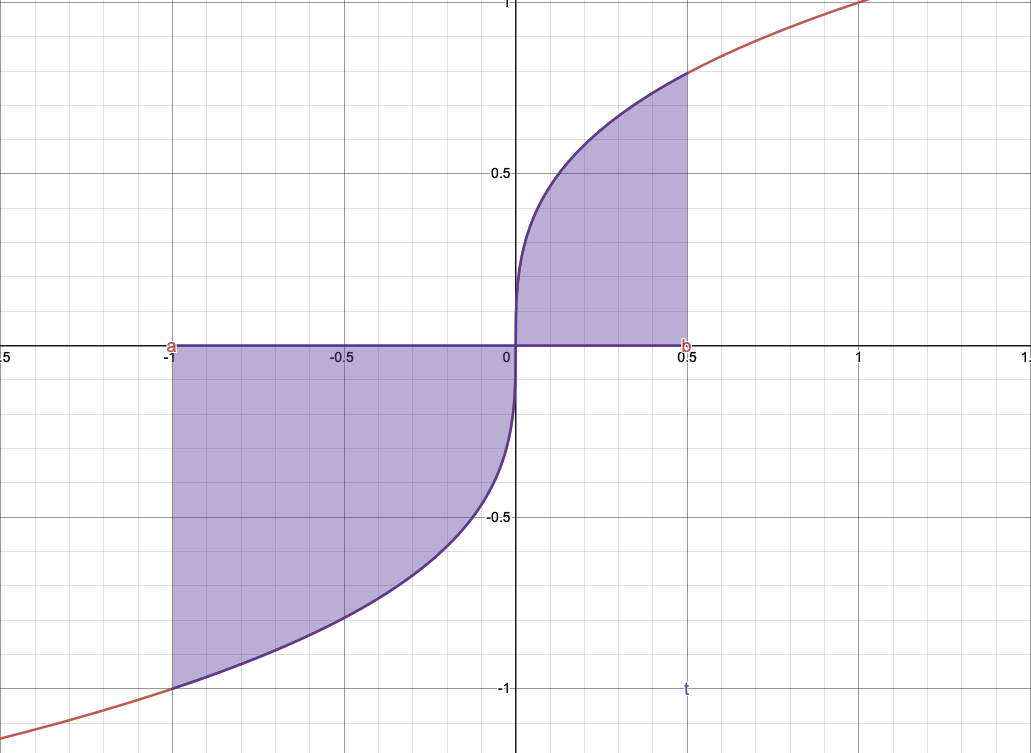
1. Постройте интегральную сумму функции на заданном отрезке:
   * Разбейте отрезок на n элементарных отрезков.
   * Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка.
   * Запишите интегральную сумму.
2. Исследуйте её значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
3. Вычислите интеграл от данной функции по отрезку аналитически и сравните значения интегральных сумм с его величиной.
4. Постройте последовательность интегральных сумм, изобразите её на графике. Изобразите точное значение интеграла горизонтальной прямой. Продемонстрируйте сходимость построенной последовательности к точному значению интеграла с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
5. Сделайте заключение.

**Решение:**

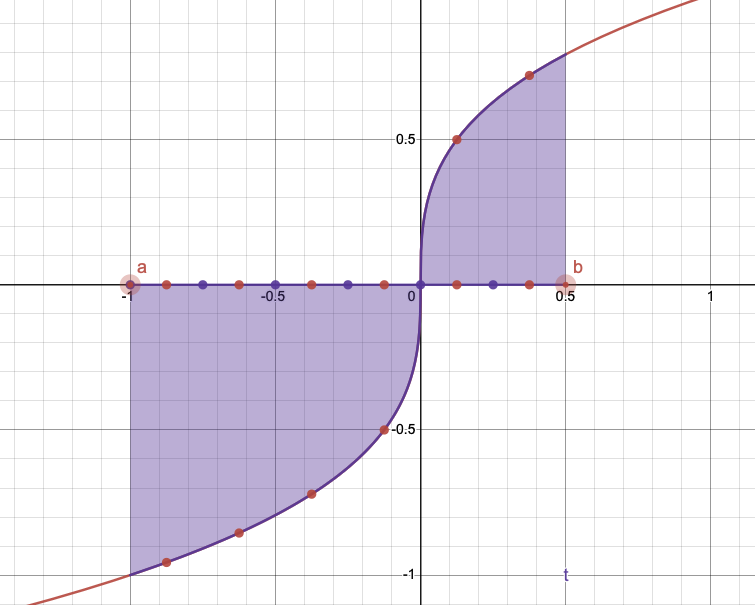
**Интегральная сумма**

1. **Составим и изобразим интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры.**

* Изобразим график функции и криволинейную трапецию в соответствии с границами отрезка .

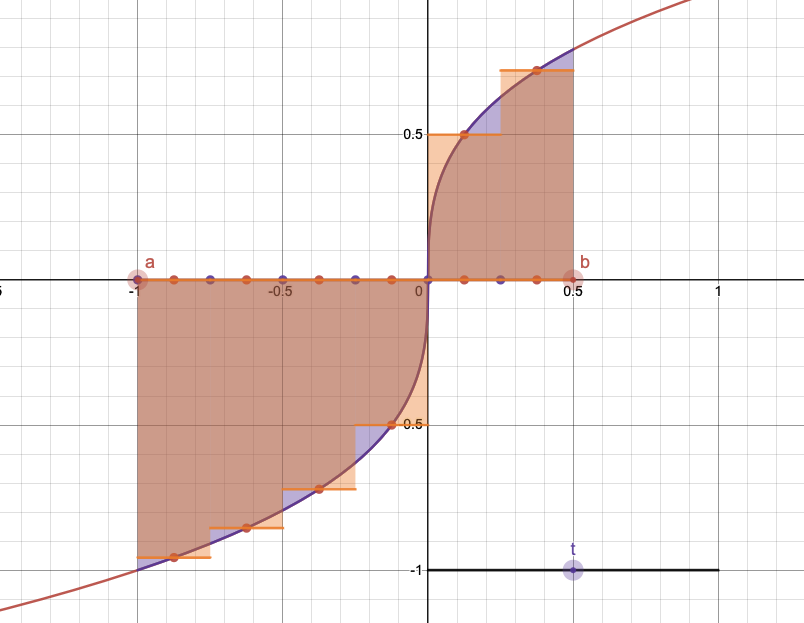


* Разобьём отрезок на элементарных отрезков и отметим точками их концы на рисунке, затем выберем по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметим их на рисунке и также отметим точками вычисленное значения функции в этих произвольных точках.

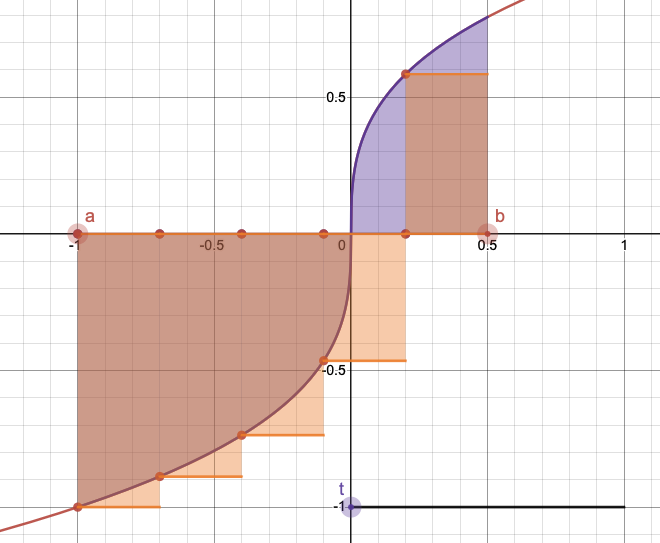
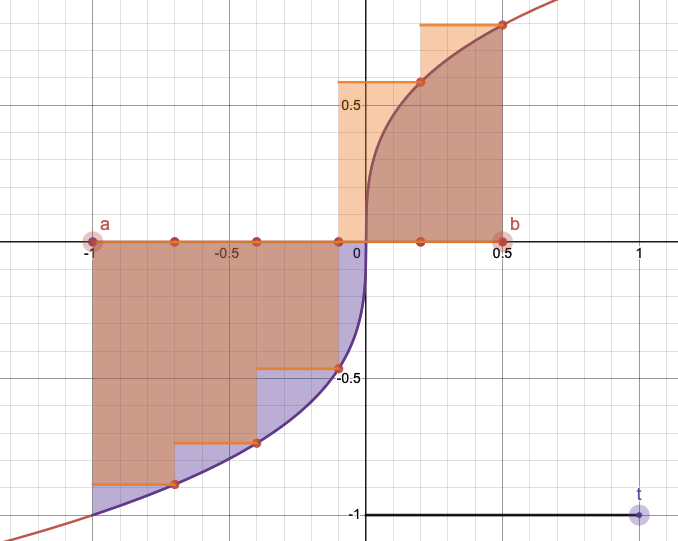
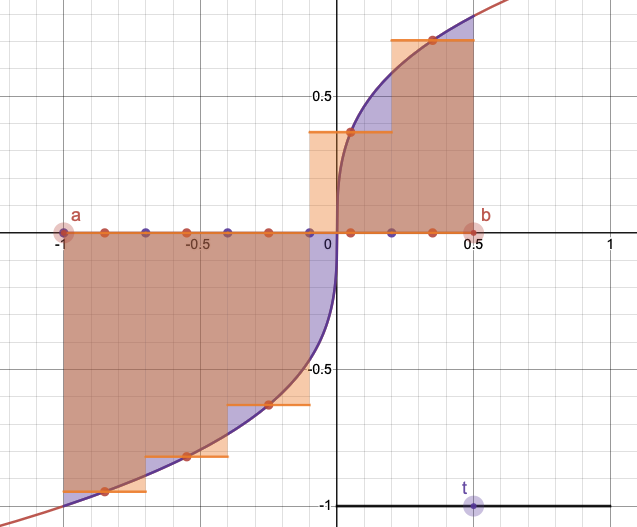


Примечание: фиолетовым цветом изображены концы элементарных отрезков, красным цветом – произвольные точки внутри этих отрезков и соответствующие им значения функции.

* Изобразим ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точки внутри элементарных отрезков.

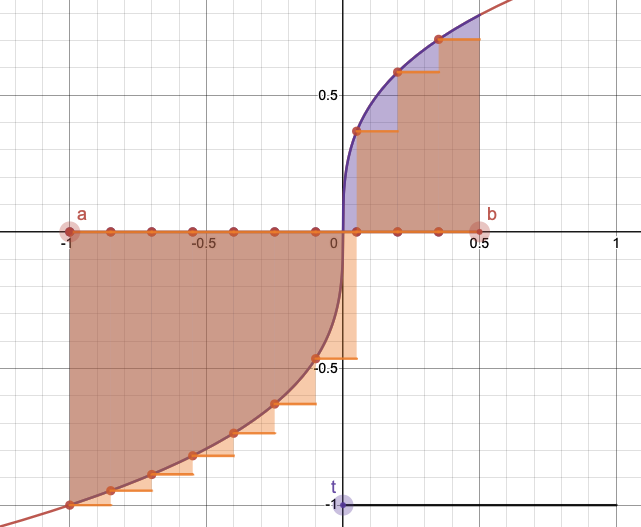
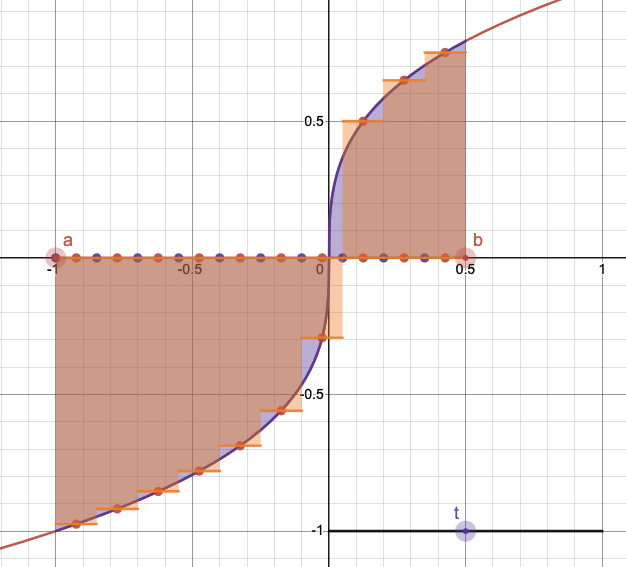
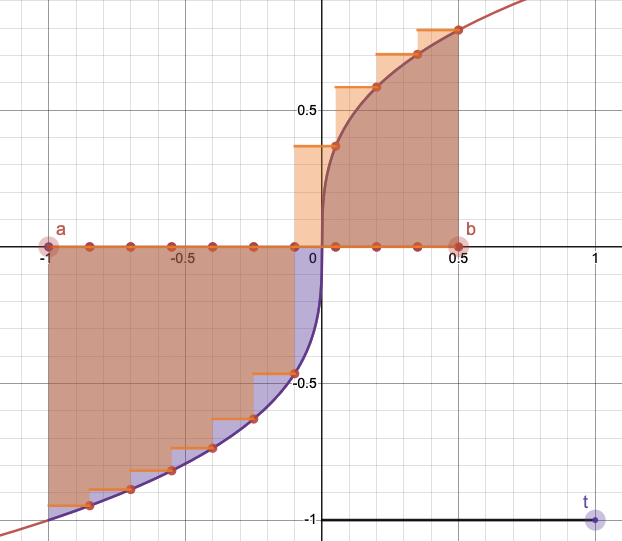


1. **Исследуем ступенчатую фигуру.**
   * Выберем количество отрезков за и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

****

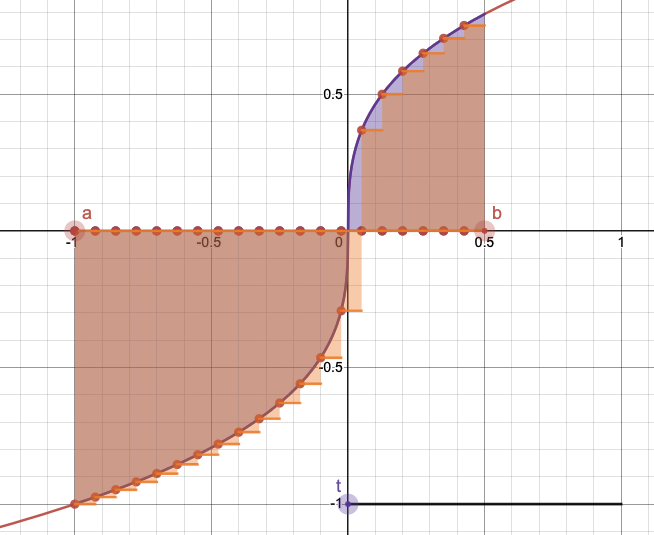
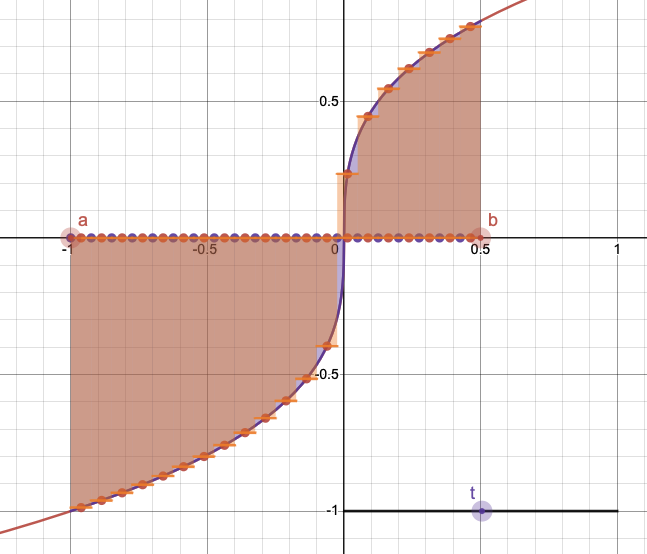
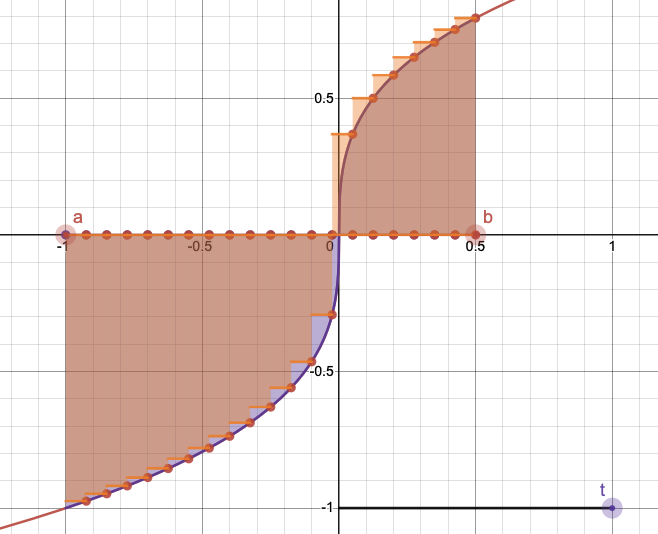
Крайнее левое Промежуточное Крайнее правое

* + Выберем количество отрезков за и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

**** **** 

Крайнее левое Промежуточное Крайнее правое

* + Выберем количество отрезков за и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое Промежуточное Крайнее правое

1. **Заключение**

В заключении графического исследования по интегральной сумме можно сделать вывод, что при увеличении количества отрезков , ступенчатая фигура все больше начинает совпадать с формой криволинейной трапеции под графиком и если найти сумму площадей каждой из ступеней, то величина этой суммы по мере увеличения будет более точно совпадать с площадью криволинейной трапеции:

где – количество отрезков (ступеней),

– длина отрезка (ступени),

– значение функции в точке на отрезке (высота ступени)

Смещение точек внутри элементарных отрезков при предельном () увеличении количества отрезков не влияет на точность. В случае ограниченного количества отрезков наиболее точным будет расположение точек в центре отрезков.

Выполнение графического исследования по интегральной сумме в графическом калькуляторе Desmos: <https://www.desmos.com/calculator/frixo8lz4c>

**Последовательность интегральных сумм**

1. **Построим интегральную сумму функции на заданном отрезке** 
   * Разобьем отрезок на элементарных отрезков, выберем по одной точке внутри каждого элементарного отрезка и запишем интегральную сумму. При :
2. **Исследуем значение с ростом при различных положениях точек внутри элементарных отрезков.**
   * Выберем количество отрезков за и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое:

Промежуточное :

Крайнее правое:

* + Выберем количество отрезков за и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое:

Промежуточное :

Крайнее правое:

* + Выберем количество отрезков за и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое:

Промежуточное :

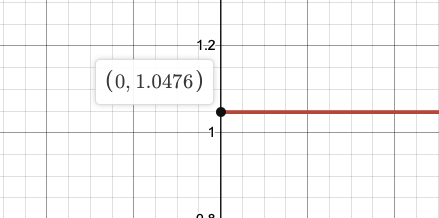
Крайнее правое:

1. **Вычислим интеграл данной функции по отрезку и сравним значения интегральных сумм с его величиной.**

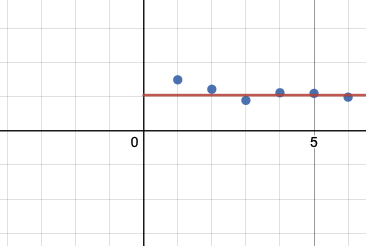
Чтобы получить точное значение площади, так как функция может возвращать отрицательные значения, то по свойству аддитивности разобьем интеграл на 2, где 1 будет являться площадью в области и 2 – при :

При сравнении значения интегральной суммы с величиной интеграла можно заметить, что значения интегральных сумм слегка неточные, но близки с искомой величиной интеграла.

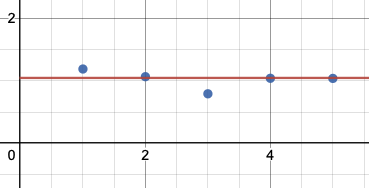
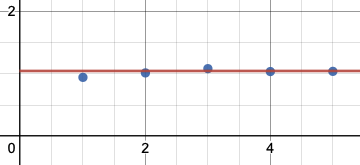
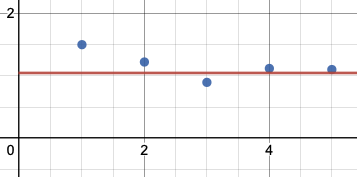
1. **Построение последовательности интегральных сумм на графике.**
   * Сперва изобразим точное значение интеграла на графике.



* Далее построим последовательность интегральных сумм.

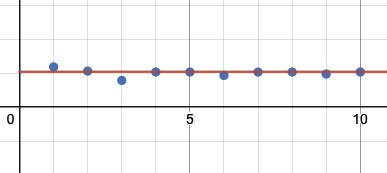
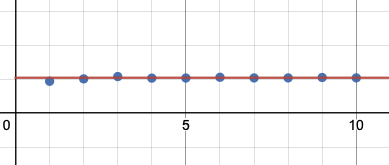
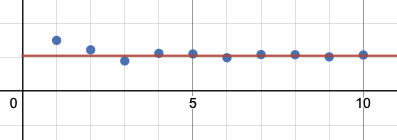


* Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.

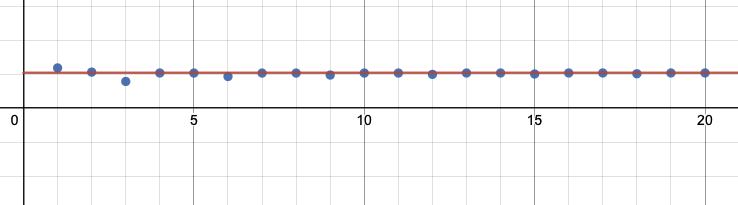
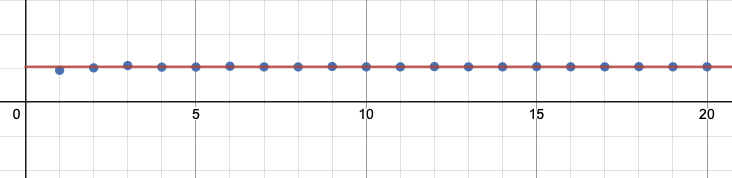
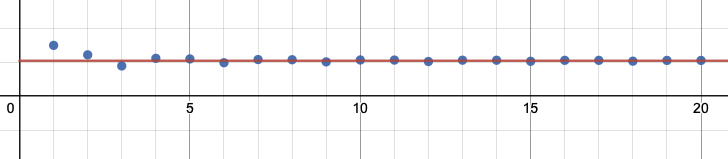
Крайнее левое Промежуточное Крайнее правое

* Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.

Крайнее левое Промежуточное Крайнее правое

* Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.

Крайнее левое Промежуточное Крайнее правое

1. **Заключение**

В заключении графического исследования по последовательности интегральных сумм можно сделать вывод, что при увеличении количества отрезков интегральная сумма все более точно сходится к искомому значению интеграла функции, что мы смогли увидеть на графике и проверить аналитически. Метод нахождения интегральной суммы очень полезен для приближенного вычисления значений интеграла без взятия самого интеграла и достаточно точно с этим справляется при большом количестве взятых отрезков. На сегодняшний день этот метод очень популярен, например для вычисления интегралов компьютерами.

Выполнение графического исследования по последовательности интегралов в графическом калькуляторе Desmos: <https://www.desmos.com/calculator/iynuluoxsp>